Grundwissen Mathematik 9. Jahrgangsstufe- G9

Hinweis: Abbildungen wurden aus Lambacher Schweizer 9 - Mathematik für Gymnasien Bayern entnommen und sind mit LS sowie der entsprechenden Seitenzahl gekennzeichnet.

Wissen und Können

I. Reelle Zahlen

Reelle Zahlen

Rationale Zahlen lassen sich als endliche oder unendlich periodische Dezimalbrüche darstellen. Zahlen, die sich nicht als endliche und nicht als unendlich periodische Dezimalbrüche, d.h. nicht als Brüche, darstellen lassen, heißen **irrationale Zahlen.** Die rationalen und irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

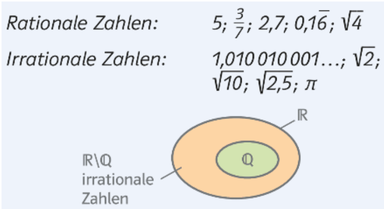


Abbildung 1: LS S. 32

Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel** (kurz: Wurzel) von a $(a \geq 0)$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Man schreibt $\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Die Zahl $\boldsymbol{a}$ unter der Wurzel heißt **Radikand.**

Aus negativen Zahlen kann keine Wurzel gezogen werden. Außerdem gilt für jede reelle Zahl $\boldsymbol{a}$**:** $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$

Rechenregeln für Quadratwurzeln

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ für $a \geq 0$ und $b \geq 0$ (Multiplikationsregel)
- $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ bzw. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $a \geq 0$ und $b > 0$ (Divisionsregel)

Achtung! Eine Additions- und Subtraktionsregel gibt es nicht!

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ bzw. $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ für $a, b > 0$

Aufgaben

Aufgabe 1

Ziehe die Wurzel soweit wie möglich – nutze Betragsstriche falls nötig!

a) $\sqrt{b^2}$
b) $\sqrt{29a^4b^2}$
c) $-\sqrt{-t^2}$
d) $-\sqrt{(-t)^2}$

Aufgabe 2

Fasse soweit wie möglich zusammen

a) $4\sqrt{b} + 2\sqrt{b}$
b) $4\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{b}$
c) $4\sqrt{b} - 2\sqrt{b}$
d) $4\sqrt{b} : (2\sqrt{b})$

Aufgabe 3

Wahr oder falsch? – Begründe deine Entscheidung!

Es gilt: $\sqrt{\sqrt{x^4}} = x$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Vereinfache soweit wie möglich $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

$$\sqrt{a^2} - 2\sqrt{b} + 3a - \frac{1}{2}\sqrt{b} + (\sqrt{a})^2$$

II. Quadratische Funktionen und Gleichungen

Quadratische Funktionen

Funktionen der Form $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ $(a \neq 0)$ heißen quadratische Funktionen. Ihre Graphen nennt man **Parabeln**. Der Graph der Funktion g: $x \mapsto x^2$ heißt **Normalparabel**.

Die Parabel zur Funktion f ist

- Nach oben geöffnet, falls $a > 0$
- Nach unten geöffnet, falls $a < 0$.

Die Parabel zur Funktion f ist

- Weiter als die Normalparabel, falls $|a| < 1$
- Enger als die Normalparabel, falls $|a| > 1$

Den **tiefsten** bzw. **höchsten** Punkt einer Parabel bezeichnet man als **Scheitelpunkt – kurz Scheitel** der Parabel.

Aufgabe 1

Gegeben sind die nachfolgenden Funktionsterme. Skizziere den Graphen dieser Funktionen, indem du den grundsätzlichen Verlauf und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ermittelst.

a) $f(x) = (x-3)^2$
b) $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$
c) $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

Grundwissen Mathematik 9. Jahrgangsstufe- G9

Scheitelpunktform von quadratischen Funktionen

Jede quadratische Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ lässt sich durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelpunktform $f: x \mapsto a(x+d)^2 + e$ bringen. Der Scheitel lässt sich dabei gut ablesen – er ist $S(-d|e)$.

Sonderfälle:

- $f: x \mapsto x^2 + e \Rightarrow S(0|e)$
- $f: x \mapsto (x+d)^2 \Rightarrow S(-d|0)$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Für quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ gilt.

Diskriminante $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$.

Ist $D < 0$	Ist $D = 0$	Ist $D > 0$
Keine Lösung	Eine Lösung: $x = -\frac{b}{2a}$	Zwei Lösungen: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die Lösungen liefern die Nullstellen der quadratischen Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

Darstellungsformen für quadratische Funktionen

Name	Form	Besonderheit
Allgemeine Form	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(0) = c$
Scheitelpunktform	$f(x) = a(x+d)^2 + e$	$S(-d|e)$
Nullstellenform	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Nullstellen x_1 und x_2

Aufgabe 2

Löse die nachfolgenden quadratischen Gleichungen.

a) $3x^2 + 18x - 21 = 0$

b) $-x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$

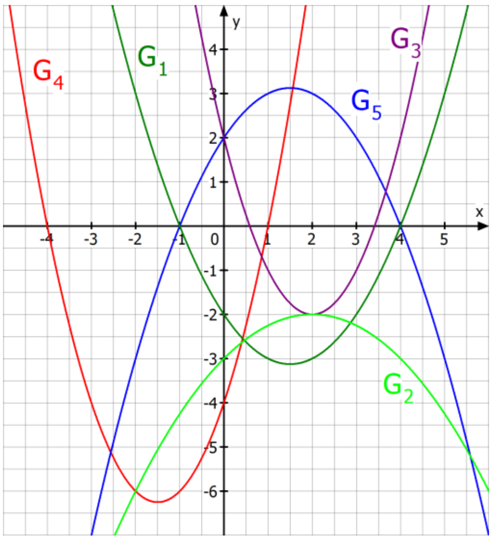
c) $x^2 - 10 = 0$

d) $-\frac{1}{2}x^2 = x$

Aufgabe 3

Ordne den Graphen 1 – 5 die passenden Funktionsterme zu:

$$f(x) = (x-1)(x+4)$$
$$g(x) = -0{,}5(x-4)(x+1)$$
$$h(x) = 0{,}5(x+1)(x-4)$$
$$i(x) = x^2 - 4x + 2$$
$$k(x) = -0{,}25(x-2)^2 - 2$$



Aufgabe 4

Bringe den gegebenen Funktionsterm auf Scheitelpunktform und gib den entsprechenden Scheitelpunkt an.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3$$

III. Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

Mengendiagramme

Verknüpfungen zweier Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments können mithilfe von **Mengendiagrammen** dargestellt werden. Häufig interessieren dabei die **Schnittmenge** und die **Vereinigungsmenge**.

- Die **Schnittmenge** $A \cap B$ der Ereignisse A und B besteht aus den Ergebnissen die sowohl in A und auch in B enthalten sind. (Abbildung 2)
- Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ der Ereignisse A und B besteht aus den Ergebnissen die in A oder in B oder in beidem enthalten sind. (Abbildung 3)

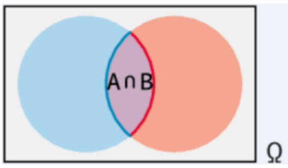


Abbildung 3: LS S.116

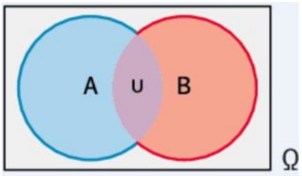


Abbildung 2: LS S.116

- **Zerlegung der Ergebnismenge** $\boldsymbol{\Omega}$: Betrachtet man zwei Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments, so beschreiben die Schnittmenge $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ eine Zerlegung der Ergebnismenge Ω. Jedes Ergebnis aus der Ergebnismenge gehört genau einer dieser Teilmengen an.

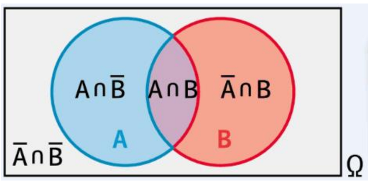


Abbildung 4: LS S. 117

Vierfeldertafel

Wird ein Zufallsexperiment n-mal durchgeführt, können die zu den oben genannten Zerlegungen gehörenden absoluten Häufigkeiten in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

	B	$\overline{B}$	
A	$H(A \cap B)$	$H(A \cap \overline{B})$	$H(A)$
$\overline{A}$	$H(\overline{A} \cap B)$	$H(\overline{A} \cap \overline{B})$	$H(\overline{A})$
	$H(B)$	$H(\overline{B})$	n

Abbildung 5: LS S.105

Statt der absoluten Häufigkeiten kann man auch relative Häufigkeiten in die Vierfeldertafel eintragen und diese Einträge als Wahrscheinlichkeiten interpretieren.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	$P(\Omega)$

Abbildung 6: LS S.109

Aufgabe 1

Gib in formaler Schreibweise an, welche Menge durch die gelbe Schraffur dargestellt ist.

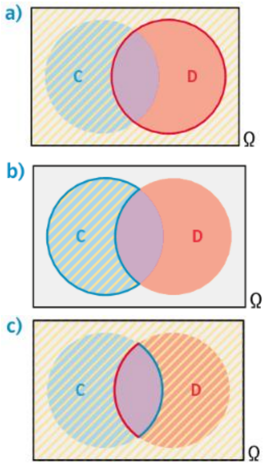


Abbildung 7: LS S. 117

Aufgabe 2

Die Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe verkaufen in der Pause an ihrer Schule Muffins. Sie bieten 46 Muffins mit Schokostückchen, 10 weniger ohne Schokostückchen und 20 nur mit Blaubeeren. Als Highlight haben sie 12 Blaubeer-Schokostückchen-Muffins. Am Ende des Schultags sind alle Muffins verkauft. Stelle den Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.

Aufgabe 3

J und B sind zwei Ereignisse eines Zufallsexperiments, das 30-mal durchgeführt wurde. Bekannt sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(J) = \frac{8}{15} \qquad P(B) = \frac{2}{3}$

$P(J \cap B) = \frac{13}{30}$

a) Erstelle eine Vierfeldertafel, die den Sachverhalt darstellt.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig herausgegriffenen Durchführung des Zufallsexperiments
   i) mindestens eines der Ereignisse J oder B
   ii) höchstens eines der Ereignisse J oder B
   eingetreten ist.

IV. Ähnlichkeit und Strahlensatz

Ähnliche Figuren

Zwei Figuren F_1 und F_2, die man durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern aufeinander abbilden kann, heißen **ähnlich**.
Man schreibt: $F_1 \sim F_2$
Der Faktor, mit dem die Streckenlängen multipliziert werden, heißt **Ähnlichkeitsfaktor k**.

Für zwei ähnliche Figuren F_1 und F_2 gilt:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß
  $\alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad \delta_1 = \delta_2$

- Entsprechende Strecken haben stets das gleiche Verhältnis
  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

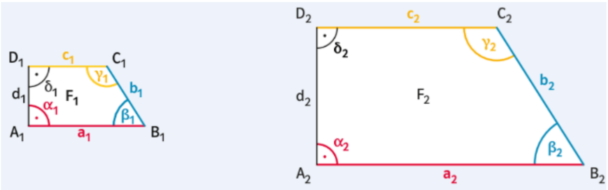


Abbildung 8: LS S. 120

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn…

- sie in zwei (und damit allen drei) Winkeln übereinstimmen. **(WW-Satz)**
- wenn sie im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen. **(S:S:S-Satz)**

Strahlensatz bei der V-Figur

Wenn zwei Halbgeraden mit dem gleichen Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, dann gilt:

- $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$
- $\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b}$

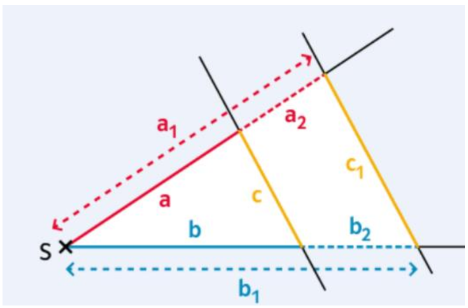


Abbildung 9: LS S. 128

Strahlensatz bei der X-Figur

Wenn zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S von zwei parallelen Geraden geschnitten werden und der Schnittpunkt S zwischen den parallelen Geraden liegt, dann gilt:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

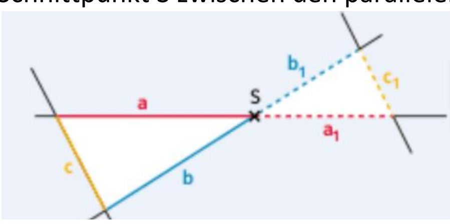


Abbildung 10: LS S.132

Aufgabe 1

Gib an, welche Figuren zueinander ähnlich sind gib bei ähnlichen Figuren, falls durch Ablesen möglich, den Ähnlichkeitsfaktor an.

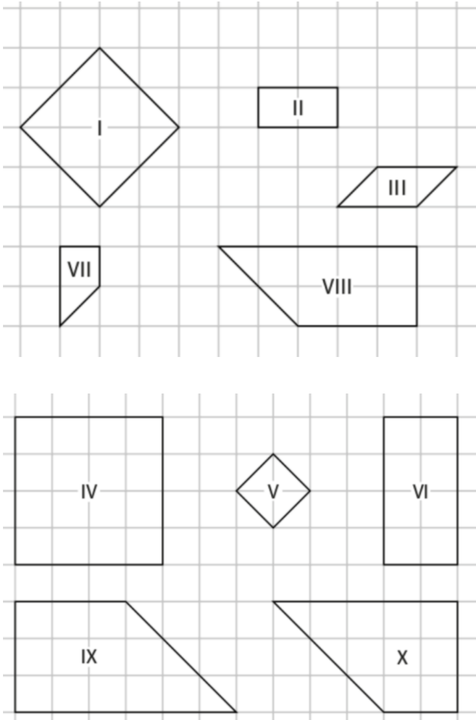


Abbildung 11: LS S.136

Aufgabe 2

Die Geraden g, h und k sind zueinander parallel. Berechne die Längen der Strecken x, y, u und v.

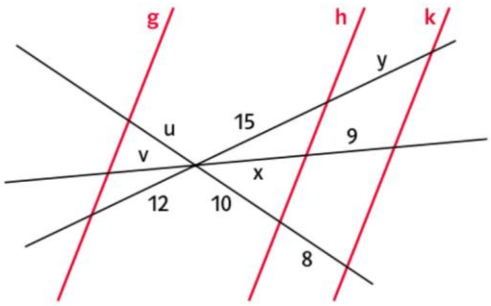
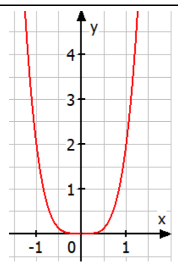
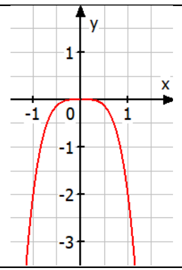
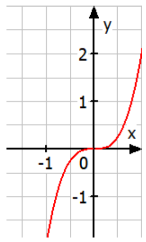
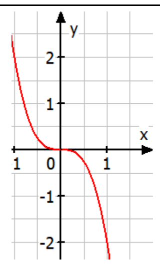


Abbildung 12: LS S. 141

V. Potenzfunktionen und n-te Wurzel

Potenzfunktionen

Eine Funktion $f: x \to a \cdot x^n$ ($n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) heißt **Potenzfunktion**.
Diese verlaufen alle durch die Punkte (0|0) und (1|a).

	$a > 0$ $n\ gerade$	$a < 0$ $n\ gerade$	$a > 0$ $n\ ungerade$	$a < 0$ $n\ ungerade$
Beispiel-funktion	$f(x) = 2x^4$	$f(x) = -2x^4$	$f(x) = 2x^3$	$f(x) = -2x^3$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	achsensymmetrisch zur y-Achse	Punktsymmetrisch zum Ursprung	Punktsymmetrisch zum Ursprung
Monotonie-verhalten	Für $x > 0$: steigend Für $x < 0$: fallend	Für $x < 0$: steigend Für $x > 0$: fallend	Für $x \in \mathbb{R}$: steigend	Für $x \in \mathbb{R}$: fallend
Charakteris-tischer Verlauf	Von links oben nach rechts oben	Von links unten nach rechts unten	Von links unten nach rechts oben	Von links oben nach rechts unten
Werte-menge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Skizze von Funktionen				

n-te Wurzel

Die n-te Wurzel von a ($a > 0$) ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.
Für diese Zahl schreib man $\sqrt[n]{a}$. $\quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Lösen von Potenzgleichungen

Beim Lösen von Potenzgleichungen $x^n = c$
($n \in \mathbb{N}, n \geq 2, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) unterscheidet man vier Fälle:

n gerade		n ungerade	
$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
zwei Lösungen $x_1 = \sqrt[n]{c}$ $x_2 = -\sqrt[n]{c}$	keine Lösung	eine Lösung $x = \sqrt[n]{c}$	eine Lösung $x = -\sqrt[n]{\lvert c\rvert}$
$x^4 = 16$ zwei Lösungen $x_1 = \sqrt[4]{16} = 2$ $x_2 = -\sqrt[4]{16}$ $= -2$	$x^4 = -16$ keine Lösung	$x^3 = 8$ eine Lösung $x = \sqrt[3]{8} = 2$	$x^3 = -8$ eine Lösung $x = -\sqrt[3]{8}$ $= -2$

<u>Aufgabe 1</u>

a) Gib eine mögliche Potenzfunktion der Form $g(x) = a \cdot x^n$ an, deren Graph im Intervall $]-\infty; 0[$ steigt, die Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$ besitzt und durch den Punkt $(1|-7)$ geht. Es gilt: $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Zwei Punkte $A(-1|-3)$ und $B(2|96)$ liegen auf dem Graphen der punktsymmetrischen Funktion $h(x) = a \cdot x^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimme den Funktionsterm $h(x)$.

<u>Aufgabe 2</u>

Löse folgende Potenzgleichung.

$$-27x^7 + 5 = 3461$$

<u>Aufgabe 3</u>

Berechne die Koordinaten der x-Werte der Schnittpunkte von den Graphen der Funktionen f und g.

$f(x) = 9x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{9}x^6$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Für $a > 0, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\ und\ n \geq 2$ gilt:

	Beispiele
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$
$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}$	$y^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{y^5}$
$a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}$	$2^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

Potenzgesetze

Für $a, b > 0$ und rationale Exponenten r und s gilt:

- **1) Potenzen mit gleicher Basis**
  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- **2) Potenzen mit gleichem Exponenten**
  $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ und $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
- **3) Potenzen von Potenzen**
  $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Aufgabe 4

Vereinfache folgende Terme soweit wie möglich und schreibe das Ergebnis immer als Wurzel.

a) $x^{-\frac{3}{2}} : x^{-2}$

b) $\sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt[5]{2x}$

c) $\sqrt[6]{a \cdot \sqrt{a^5}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot \sqrt[4]{y^7}$

VI. Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.
In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

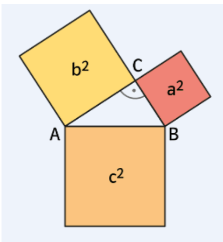


Abbildung 13: LS S.165

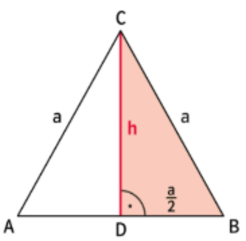
Der Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Wenn für die Seiten a, b und c eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.

Berechnungen an Figuren und Körper

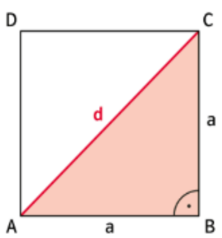
Für die Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a gilt:

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Für die Diagonale d eines Quadrats mit der Kantenlänge a gilt:

$$d = a \cdot \sqrt{2}$$



Für die Raumdiagonale e eines Würfels mit der Kantenlänge a gilt:

$$e = a \cdot \sqrt{3}$$

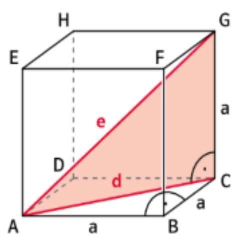


Abbildung 14: LS S. 172

Aufgabe 1

Berechne die Länge der Strecke x. Alle Maße sind in cm angegeben.

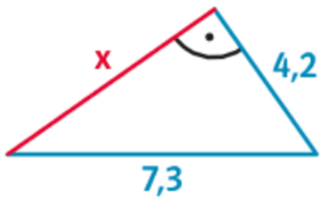


Abbildung 15: LS S.183

Aufgabe 2

Die Figur zeigt eine typische Etagenaufteilung des Flatron Buildings in New York dessen Grundriss nahezu ein Dreieck ist. Untersuche anhand der Daten, ob es sich dabei um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.

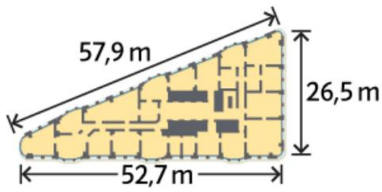


Abbildung 16: LS S. 177

Aufgabe 3

Berechne die Länge der Diagonalen eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 10 cm^2.

Grundwissen Mathematik 9. Jahrgangsstufe- G9

VII. Trigonometrie

Sinus, Kosinus und Tangens

Für die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck legt man fest:

$$\sin\alpha = \frac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\textit{Ankathete von } \alpha}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Ankathete von } \alpha}$$

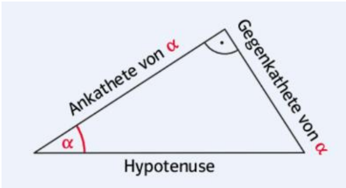


Abbildung 17: LS S. 186

Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis

Ist ein Punkt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) und α der Winkel zwischen der positiven x- Achse als ersten Schenkel und der Strecke $\overline{OP}$ als zweiten Schenkel, so legt man fest:

$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

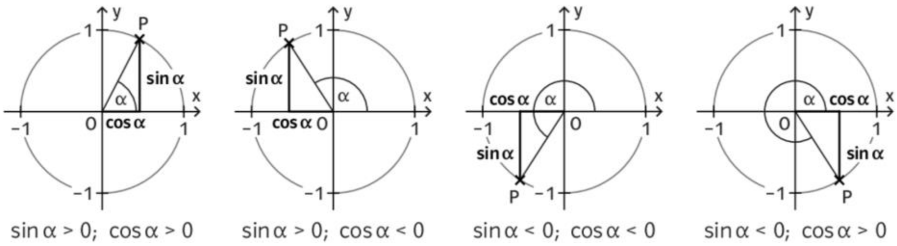


Abbildung 18: LS S. 198

Hieraus ergibt sich:

- $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ und $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(180° + \alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt:

- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ bzw. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
- $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90°)$

Sinussatz

In jedem Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\ \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma};\ \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

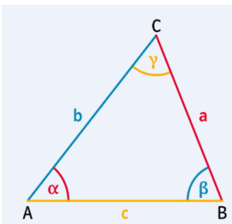


Abbildung 19: LS S. 202

Kosinussatz

In jedem Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

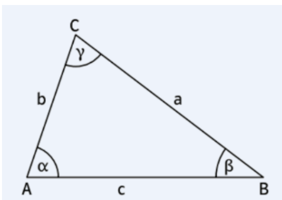


Abbildung 20: LS S.206

Aufgabe 1

Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse c.
Es gilt: $b = 4{,}8\ cm\ \beta = 42°$

Aufgabe 2

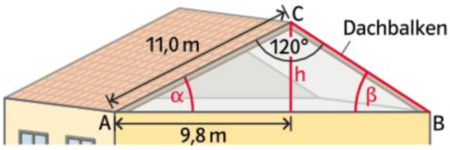


Abbildung 21: LS S.215

a) Berechne die Giebelhöhe h des Dachraums und die Dachneigungen α und β.
b) Berechne die Länge des rot markierten Dachbalkens.

Aufgabe 3

Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks ABC.
a) $a = 7cm, b = 12\ cm, c = 18\ cm$
b) $b = 8\ cm, c = 12\ cm,\ \alpha = 40°$

Aufgabe 4

Bestimme alle Winkel $\alpha \in [0°; 360°[$, für die gilt:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sin\alpha = -0123$

Lösungen zu den Aufgaben

I. Reelle Zahlen

Lösungen zu Aufgabe 1

a) $\sqrt{b^2} = |b|$ Die Betragsstriche müssen bleiben, da nicht klar ist, ob b positiv oder negativ ist. In $\sqrt{b^2}$ können jedoch für b sowohl positive als auch negative Werte eingesetzt werden, da das Quadrat jede Zahl größer oder gleich Null macht.
b) $\sqrt{29a^4b^2} = \sqrt{29}a^2|b| = a^2 \cdot |b| \cdot \sqrt{29}$ Die Betragsstriche bei a^2 können weggelassen werden, da a^2 für alle $a \in \mathbb{R}$ größer oder gleich Null ist.
c) $-\sqrt{-t^2} =$ $\lightning$ Berechnung ist nicht möglich, da t^2 für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv ist, das $-$ davor macht den Wert unter der Wurzel $(-t^2)$ jedoch wieder negativ. Die Wurzel aus einer negativen Zahl kann nicht berechnet werden.
d) $-\sqrt{(-t)^2} = -\sqrt{t^2} = -|t|$ Begründung siehe a)

Lösung zu Aufgabe 2

a) $4\sqrt{b} + 2\sqrt{b} = 6\sqrt{b}$
b) $4\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{b} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = 8\left(\sqrt{b}\right)^2 = 8b$
c) $4\sqrt{b} - 2\sqrt{b} = 2\sqrt{b}$
d) $4\sqrt{b} : \left(2\sqrt{b}\right) = \frac{4\sqrt{b}}{2\sqrt{b}} = \frac{4}{2} = 2$ „Kürzen“

Lösung zu Aufgabe 3

Es gilt: $\sqrt{\sqrt{x^4}} = x$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Zunächst gilt: $\sqrt{\sqrt{x^4}} = \sqrt{x^2} = |x|$ Die Aussage ist somit falsch. Die gegebene Aussage wäre richtig, falls $x \in \mathbb{R}_0^+$ - also nur positiv oder gleich Null sein dürfte.

Angenommen $x = -2$, dann würde mit der gegebenen Aussage aus Aufgabe 3 folgen:

$$\sqrt{\sqrt{(-2)^4}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

Für das gewählte $x = -2$ ergibt sich dann aber das Endergebnis $x = 2$, was so nicht stimmen kann.

Lösung zu Aufgabe 4

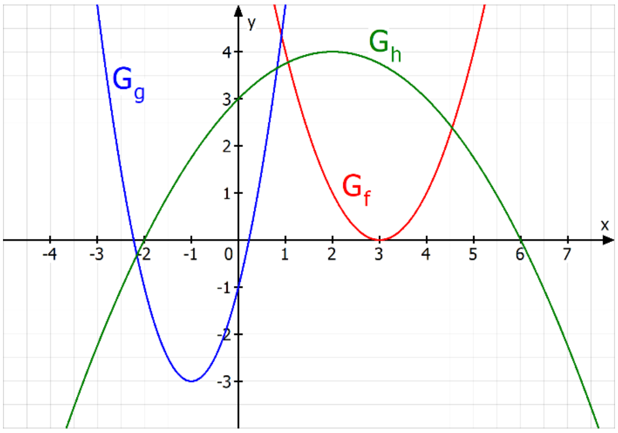
Vereinfache soweit wie möglich
$(a, b \in \mathbb{R}^+)$

$$\sqrt{a^2} - 2\sqrt{b} + 3a - \frac{1}{2}\sqrt{b} + \left(\sqrt{a}\right)^2 = a - 2\sqrt{b} + 3a - \frac{1}{2}\sqrt{b} + a = 5a - 2{,}5\sqrt{b}$$

II. Quadratische Funktionen und Gleichungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f(x) = (x-3)^2$



- Scheitel bei $S(3|0)$
- Nach oben geöffnet
- Genauso weit wie Normalparabel
- Nullstelle ist Scheitelpunkt

b) $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$

- Scheitelpunkt bei $S(-1|-3)$
- Nach oben geöffnet
- Enger als Normalparabel
- Nullstellen nicht ablesbar, aber mit Mitternachtsformel berechenbar (vorher Umformung in Allgemeine Form durch Ausmultiplizieren)

c) $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

- Scheitelpunkt nicht ablesbar (Berechenbar durch quadratisches Ergänzen)
- Nach unten geöffnet
- Weiter als Normalparabel
- Nullstellen nicht ablesbar, aber mit Mitternachtsformel berechenbar (vorher Umformung in Allgemeine Form durch Ausmultiplizieren)

Lösung zu Aufgabe 2

a) $3x^2 + 18x - 21 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 252}}{6} = \frac{-18 \pm \sqrt{576}}{6} = \frac{-18 \pm 24}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1\,; x_2 = -7$$

b) $-x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} \Rightarrow -x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{3}}}{-2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{-\frac{8}{9}}}{-2} =$$

Keine Lösung, da $-\frac{8}{9} < 0$!

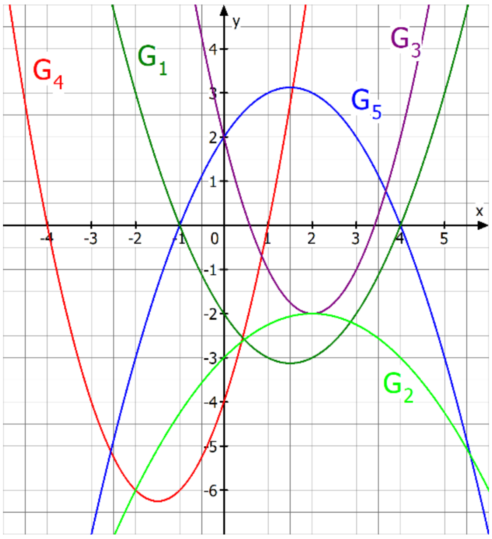
c) $x^2 - 10 = 0$

$$x^2 = 10 \Rightarrow x_1 = \sqrt{10}; x_2 = -\sqrt{10}$$

d) $-\frac{1}{2}x^2 = x \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \; und \; -\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

Lösung zu Aufgabe 3



$f(x) = (x-1)(x+4) \Rightarrow G_4$

$g(x) = -0{,}5(x-4)(x+1) \Rightarrow G_5$

$h(x) = 0{,}5(x+1)(x-4) \Rightarrow G_1$

$i(x) = x^2 - 4x + 2 \Rightarrow G_3$

$k(x) = -0{,}25(x-2)^2 - 2 \Rightarrow G_2$

Lösung zu Aufgabe 4

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 3 = -\frac{1}{4}((x-2)^2 - 2^2) - 3$$
$$= -\frac{1}{4}((x-2)^2 - 4) - 3 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 - 3 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 2$$
$$\Rightarrow S(2|-2)$$

III. Wahrscheinlichkeit

Lösung Aufgabe 1

a) $\overline{D}$

b) $C \cap \overline{D}$

c) $\overline{C \cap D}$ oder $\overline{C} \cup \overline{D}$

Lösung Aufgabe 2

S: Muffin mit Schokostückchen

B: Muffin mit Blaubeeren

	S	$\overline{S}$	
B	12	20	32
$\overline{B}$	34	16	50
	46	36	82

Lösung Aufgabe 3

a)

	J	$\bar{J}$	
B	$\frac{13}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$
$\bar{B}$	$\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$
	$\frac{8}{15}=\frac{16}{30}$	$\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$	1

b) i) $P(J \cup B) = P(J) + P(B) - P(J \cap B) = \frac{8}{15} + \frac{2}{3} - \frac{13}{30} = \frac{23}{30} \approx 76{,}7\%$

ii) $P(\bar{J} \cup \bar{B}) = P(\bar{J}) + P(\bar{B}) - P(\bar{J} \cap \bar{B}) = \frac{10}{30} + \frac{14}{30} - \frac{7}{30} = \frac{17}{30} \approx 56{,}7\%$

Oder: $P(\overline{J \cap B}) = 1 - P(J \cap B) = 1 - \frac{13}{30} = \frac{17}{30}$

Oder: $P(J \cap \bar{B}) + P(\bar{J} \cap B) + P(\bar{J} \cap \bar{B}) = \frac{3}{30} + \frac{7}{30} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}$

IV. Ähnlichkeit und Strahlensatz

Lösung Aufgabe 1

$I \sim IV$ (Ablesen von k nicht möglich, da $k = \frac{2}{\sqrt{2}}$ bzw. $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

(Quadrat I hat die Seitenlänge $\sqrt{2}$, Quadrat IV hat die Seitenlänge 2)

$I \sim V$ mit $k = 2$ bzw. $k = \frac{1}{2}$

$IV \sim V$ (Ablesen von k nicht möglich, da mit $k = \frac{4}{\sqrt{2}}$ bzw. $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$)

(Quadrat IV hat die Seitenlänge 2, Quadrat V hat die Seitenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

(Zwei Quadrate sind immer ähnlich, da sie in allen Seitenverhältnissen und allen vier Winkeln übereinstimmen)

$II \sim VI$ mit $k = 2$ bzw. $k = \frac{1}{2}$

$VII \sim IX$ mit $k = 3$ bzw. $k = \frac{1}{3}$

Lösung Aufgabe 2

$\frac{9}{x} = \frac{8}{10} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 10}{8} = 11{,}25$

$\frac{y}{15} = \frac{8}{10} \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 8}{10} = 12$

$\frac{u}{10} = \frac{12}{15} \Rightarrow u = \frac{12 \cdot 10}{15} = 8$

$\frac{v}{x} = \frac{12}{15} \Rightarrow v = \frac{12 \cdot x}{15} = \frac{12 \cdot 11{,}25}{15} = 9$

V. Potenzfunktionen und n-te Wurzel

Lösung Aufgabe 1

a) z.B. $g(x) = -7x^4$
(-7 ist der Vorfaktor a, die Potenz n muss gerade sein)

b) Da der Punkt $(-1|-3)$ auf dem Graphen der Funktion liegt und dieser punktsymmetrisch ist, muss auch der Punkt $(1|3)$ auf dem Graphen liegen. Somit gilt: $a = 3$

$h(x) = 3 \cdot x^n$

$B(2|96)$ in h einsetzen, um n zu bestimmen

$96 = 3 \cdot 2^n \qquad |:3$

$32 = 2^n$

$\Rightarrow n = 5,\ da\ 2^5 = 32$

$$\Rightarrow h(x) = 3 \cdot x^5$$

Lösung Aufgabe 2

$$-27x^7 + 5 = 3461 \qquad |-5$$
$$-27x^7 = 3456 \qquad |:(-27)$$
$$x^7 = -128$$
$$x = -\sqrt[7]{128} = -2$$

Lösung Aufgabe 3

$$9x^2 = \frac{1}{9}x^6$$
$$9x^2 - \frac{1}{9}x^6 = 0$$
$$\frac{1}{9}x^2 \cdot (81 - x^4) = 0$$
$$\boldsymbol{x_1 = 0} \qquad \text{oder} \qquad 81 - x^4 = 0$$
$$x^4 = 81$$
$$\boldsymbol{x_2 = \sqrt[4]{81} = 3}$$
$$\boldsymbol{x_3 = -\sqrt[4]{81} = -3}$$

Lösung Aufgabe 4

a) $x^{-\frac{3}{2}} : x^{-2} = x^{-\frac{3}{2}-(-2)} = x^{-\frac{3}{2}+2} = x^{0,5} = \sqrt{x}$

b) $\sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt[5]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}} \cdot (2x)^{\frac{1}{5}} = (2x)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = (2x)^{\frac{5}{15}+\frac{3}{15}} = (2x)^{\frac{8}{15}} = \sqrt[15]{(2x)^8} = \sqrt[15]{256x^8}$

c) $\sqrt[6]{a \cdot \sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a \cdot a^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[6]{a^{1+\frac{5}{2}}} = \sqrt[6]{a^{\frac{7}{2}}} = \left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{6}} = a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

d) d) $\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot \sqrt[4]{y^7} = y^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{7}{4}} = y^{-\frac{1}{3}+\frac{7}{4}} = y^{-\frac{4}{12}+\frac{21}{12}} = y^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{y^{17}}$

VI. Satz des Pythagoras

Lösung Aufgabe 1

$x^2 + 4{,}2^2 = 7{,}3^2$

$x^2 = 7{,}3^2 - 4{,}2^2$

$x = \sqrt{7{,}3^2 - 4{,}2^2} \approx 6{,}0\ [cm]$

Lösung Aufgabe 2

In einem rechtwinkligen Dreieck müsste der Satz des Pythagoras gelten.

$(26{,}5\ m)^2 + (52{,}7\ m)^2 = 3479{,}54\ m^2$

$(57{,}9\ m)^2 = 3352{,}41\ m^2$

$3479{,}54\ m^2 \neq 3352{,}41\ m^2$, also ist das Dreieck nicht exakt rechtwinklig

Zusatz:

$\sqrt{3479{,}54\ m^2} \approx 59\ m$

Wäre die längste Seite 59 m statt 57,9 m, so wäre das Dreieck rechtwinklig.

Lösung Aufgabe 3

1. Schritt: Berechnung der Seitenlänge a des Quadrats

$a^2 = 10cm^2$

$a = \sqrt{10cm^2} = \sqrt{10}\ cm$

2. Schritt: Berechnung der Diagonale d

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$d^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{10}\ cm\right)^2 = 20cm^2$

$d = \sqrt{20cm^2} = \sqrt{20}\ cm \approx 4{,}5\ cm$

VII. Trigonometrie

Lösung Aufgabe 1

- $\alpha = 90° - \beta = 90° - 42° = 48°$
- $\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad | \cdot c$

  $c \cdot \sin\beta = b \qquad |: \sin\beta$

  $c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{4{,}8\ cm}{\sin 42°} \approx 7{,}17\ cm$
- $\cos\beta = \frac{a}{c} \qquad | \cdot c$

  $\mathrm{a} = \cos\beta \cdot c = \cos 42° \cdot 7{,}17\ cm \approx\ 5{,}33\ cm$

Lösung Aufgabe 2

a)

- $h^2 + (9{,}8m)^2 = (11{,}0m)^2$

  $h^2 = (11{,}0m)^2 - (9{,}8m)^2$

  $h = \sqrt{(11{,}0m)^2 - (9{,}8m)^2} \approx 5{,}0\ m$
- $\cos\alpha = \frac{9{,}8\ m}{11{,}0\ m} \ \rightarrow \alpha \approx 27°$
- $\beta = 180° - 120° - 27° = 33°$

b) $\sin\beta = \frac{h}{x} \qquad | \cdot x$

$x \cdot \sin\beta = h \qquad |: \sin\beta$

$x = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{5{,}0\ m}{\sin 33°} \approx 9{,}2\ m$

Lösung Aufgabe 3

a)

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad | - b^2 - c^2$

  $a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad |: (-2 \cdot b \cdot c)$

  $\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} = \frac{(7cm)^2 - (12\ cm)^2 - (18\ cm)^2}{-2 \cdot 12\ cm \cdot 18\ cm} \approx 0{,}97$

  $\alpha \approx 14{,}1°$
- $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$

  $\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{12\ cm}{7\ cm} \cdot \sin 14{,}1° \approx 0{,}42$

  $\beta \approx 24{,}8°$
- $\gamma = 180° - 14{,}1° - 24{,}8° = 141{,}1°$

b)

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = (8cm)^2 + (12\ cm)^2 - 2 \cdot 8\ cm \cdot 12\ cm \cdot \cos 40°$

  $a = \sqrt{(8cm)^2 + (12\ cm)^2 - 2 \cdot 8\ cm \cdot 12\ cm \cdot \cos 40°} \approx 7{,}8\ cm$

- $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$

  $\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{8\ cm}{7{,}8\ cm} \cdot \sin 40° \approx 0{,}66$

  $\beta \approx 41°$

- $\gamma = 180° - 40° - 41° = 99°$

Lösung Aufgabe 4

a) Der Taschenrechner liefert $\alpha_1 = 45°$.

   Da der Sinus auch im zweiten Quadranten positiv ist und es gilt: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

   $\alpha_2 = 180° - 45° = 135°$

b) Der Taschenrechner liefert $\alpha_1 = 30°$.

   Da der Kosinus auch im vierten Quadranten positiv ist und es gilt: $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$

   $\alpha_2 = 360° - 30° = 330°$

c) Der Taschenrechner liefert $\alpha \approx -7°$,

   das entspricht einem Winkel von $\alpha_1 = 360° - 7° = 353°$

   Da der Sinus auch im dritten Quadranten negativ ist und es gilt: $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$

   $\alpha_2 = 180° + 7° = 187°$