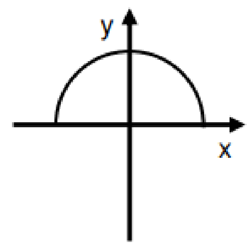
# Grundwissen Mathematik — 8. Jahrgangsstufe

| Wissen und Können | Aufgaben und Beispiele |
|---|---|

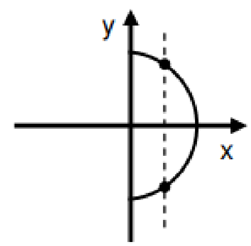
## Funktionen

Eine **Funktion** ist eine eindeutige Zuordnung: Jedem Wert aus der Definitionsmenge $D_f$ wird **genau ein** Wert aus der Wertemenge $W_f$ zugeordnet.

Die **Definitionsmenge D** einer Funktion gibt vor, welche Zahlen in einen Funktionsterm eingesetzt werden dürfen. Die Menge aller Funktionswerte y heißt **Wertemenge W**.




Funktion



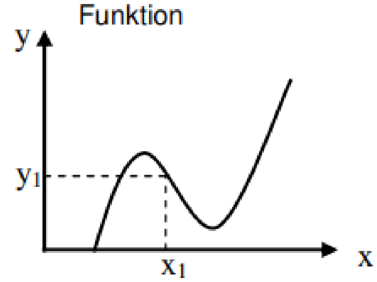

**keine** Funktion

**Schreibweisen:**

Funktionsvorschrift: $f: x \mapsto y = \underbrace{0{,}5x+1}_{\text{Funktionsterm}}$

Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5x+1$ bzw. $y = 0{,}5x+1$

**Graph:**
Ordnet man jedem Wertepaar (x;y) einen Punkt (x;y) im Koordinatensystem zu, so entsteht der Graph $G_f$ der Funktion f.




**Direkte Proportionalität:** $y = c \cdot x$

x und y sind direkt proportional,
- wenn zum n-fachen Wert für x der n-fache Wert für y gehört
- die Wertepaare (x;y) **quotientengleich** sind:

  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = c$ (Konstante)

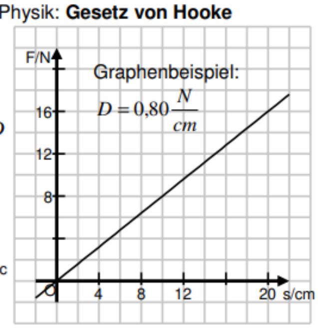
Der Graph einer direkten Proportionalität ist eine **Ursprungsgerade**.

Beispiel aus der Physik: **Gesetz von Hooke**

$\frac{F}{s} = D = konst.$

$\frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2} = ... = D$

F: Kraftbetrag
s: Auslenkung/ Dehnung
D: Federkonstante
(Federkonstante D entspricht Konstante c bzw. Steigung m)

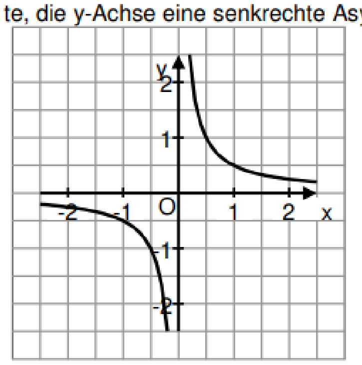



**Indirekte Proportionalität:** $y = \frac{c}{x}$; $D_f = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$

x und y sind indirekt proportional,
- wenn zum n-fachen Wert für x der $\frac{1}{n}$-fache Wert für y gehört
- die Wertepaare (x;y) **produktgleich** sind:

  $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = c$ (Konstante)

Der Graph einer indirekten Proportionalität ist eine **Hyperbel**. Dabei ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote, die y-Achse eine senkrechte Asymptote.



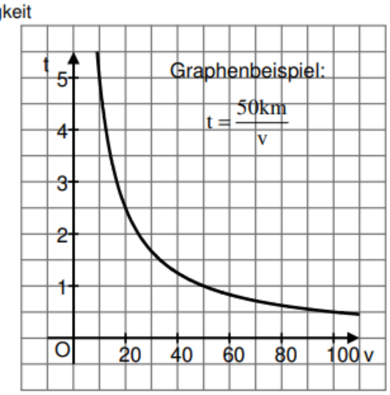

Beispiel:
$f: x \mapsto \frac{0{,}5}{x}$

Beispiel aus der Physik: **Wegstrecke**

$v \cdot t = s = \text{konst.}$

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 = ... = s$

v: Geschwindigkeit
t: Zeit
s: Strecke



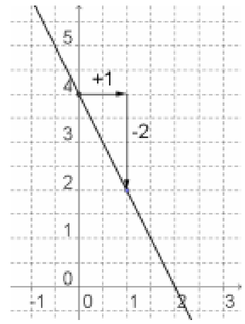

**Hinweis:**
Eigentlich besitzt eine Hyperbel zwei Graphenäste.
(siehe linke Spalte)

## Lineare Funktionen

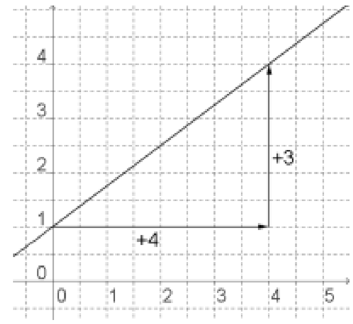
Eine Funktion der Form $y = mx + t$ heißt lineare Funktion.
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit Steigung **m**:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{Höhenzuwachs}}{\text{waagrechter Zuwachs}}$$

Die Gerade schneidet die y-Achse beim y-Achsenabschnitt **t**.




$y = -2x + 4$




$y = \frac{3}{4}x + 1$

**Nullstellen:** Die Stellen x, an denen der Graph einer Funktion die x-Achse schneidet, heißen Nullstellen. Zur Berechnung löst man die Gleichung $f(x) = 0$.

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**
Der Punkt, an dem der Graph die y-Achse schneidet.
Die x-Koordinate ist 0, die y-Koordinate f(0).

Berechne die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der Funktionen:

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 6;\ g(x) = -1{,}2x + 0{,}6$$

**Standardaufgaben zu linearen Funktionen:**
*Graphen zeichnen:*
y-Abschnitt markieren und Steigungsdreieck einzeichnen.

*Aufstellen der Geradengleichung:*
Steigung bestimmen und y-Abschnitt bestimmen.

Zeichne den Graphen der Funktionen
$f(x) = \frac{3}{4}x - 6;\ g(x) = -0{,}4x + 2$

Bestimme die Gleichung der Geraden, für die gilt:
a) Die Gerade verläuft durch P(1/1) und ist parallel zur Geraden $h: y = 0{,}25x + 1$.
b) Die Gerade verläuft durch die Punkte P(-2/2) und Q(3/-1).

**Lösen linearer Ungleichungen:**
Graphisch: Zeichnung zweier Geraden, Lage zueinander betrachten
Rechnerisch: Äquivalenzumformungen
(Ungleichheitszeichen dreht sich bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl.)

Ermittle die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$-3x + 3 < 2x + 13$$

## Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Lösungen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen (I und II) mit zwei Unbekannten sind Zahlenpaare, die beim Einsetzen beide Gleichungen I und II gleichzeitig erfüllen.
Bei der **graphischen Lösung** werden die zu den beiden Gleichungen gehörigen Geraden gezeichnet. Der Schnittpunkt der Geraden ist die Lösung.
Bei der **rechnerischen Lösung** stehen das Einsetzverfahren, das Gleichsetzverfahren sowie das Additionsverfahren zur Verfügung.
Beim **Einsetzungsverfahren** wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und der ermittelte Term in die andere Gleichung eingesetzt.

Löse die linearen Gleichungssysteme grafisch und rechnerisch:

a) $\begin{aligned} \text{I}: 3x - 2y &= 8 \\ \text{II}: 2x + y &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \text{I}: 2x - y &= -1 \\ \text{II}: y &= 1 - x \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \text{I}: -x + 4 &= 2y \\ \text{II}: 0{,}5x - 1 &= -2y \end{aligned}$

## Zufall und Wahrscheinlichkeit

| | |
|---|---|
| Versuchsausgänge von Zufallsexperimenten heißen Ergebnisse $\omega$.<br>Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnismenge $\Omega$.<br>Teilmengen der Ergebnismenge heißen Ereignisse.<br>Ein Elementarereignis besteht aus nur einem Element.<br>Jedes Ereignis $A$ hat ein Gegenereignis $\bar{A}$. Es besteht aus den Ereignissen von $\Omega$, die nicht zu $A$ gehören. | Gib die Ergebnismenge an:<br>a) Dreimaliges Werfen einer Münze.<br>b) Gleichzeitiges Werfen von zwei gleichartigen Würfeln. |
| Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace-Experimente | |
| Für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Laplace-Experiments gilt:<br>$P(E)=\frac{\text{Anzahl der Elemente von E}}{\text{Anzahl der Elemente von }\Omega}=\frac{\lvert E\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$ | Gib die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse an:<br>A: Primzahl beim einmaligen Würfeln.<br>B: Mindestens einmal „Zahl“ beim gleichzeitigen Werfen zweier unterschiedlicher Münzen. |

## Gebrochen rationale Funktionen

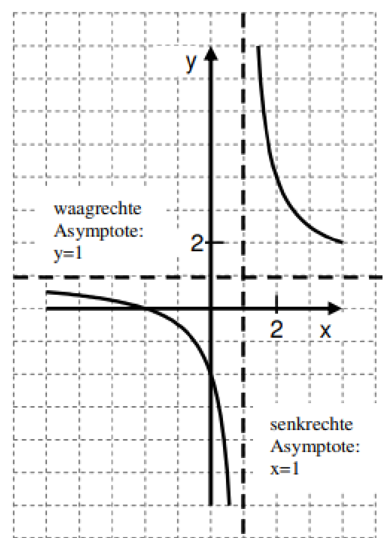
Im Funktionsterm einer gebrochen rationalen Funktion steht die Variable im Nenner.

Die Nullstellen des Nennerterms heißen Definitionslücken.

Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig nahe annähert, nennt man **Asymptote** des Funktionsgraphen.

Bsp.: $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$

$D_f=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$




## Bruchterme und Bruchgleichungen

| | |
|---|---|
| Das **Rechnen mit Bruchtermen** erfolgt wie das gewöhnliche Bruchrechnen (gemeinsamer Nenner bei Addition und Subtraktion!). | Berechne: $\frac{2}{x-1}-\frac{3+2x}{x^2-x}$; $\frac{2}{x^2-x}\cdot\frac{x-1}{4x}$; $\frac{5y}{x^2}:\frac{y}{x^3}$ |
| **Bruchgleichungen:**<br>Definitionsmenge bestimmen; Gleichung mit einem gemeinsamen Nenner der Bruchterme multiplizieren; vereinfachte Gleichung lösen; prüfen, ob die Lösung in $D_f$ enthalten ist. | Löse die Bruchgleichungen:<br>$\frac{1-x}{x+1}=\frac{4-x}{x-1}$; $\frac{3}{x+2}=\frac{4}{2x+4}$ |

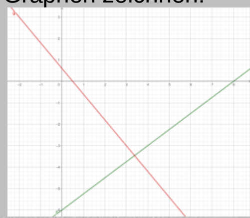
| Grundwissen Mathematik | 8. Jahrgangsstufe |
|---|---|

| Potenzen mit ganzahligen Exponenten | |
|---|---|
| $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$<br>$a^0 = 1$; $a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ | Bsp.: $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$; $10^{-3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000}$<br>$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $3^{-4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$; $4^0 = 1$ |
| **Potenzgesetze:**<br>$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$<br>$a^m : a^n = a^{m-n}$<br>$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$<br>$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$<br>$a^n : b^n = (a : b)^n$ mit $\left(a, b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\};\ m, n \in \mathbb{Z}\right)$ | Bsp.:<br>$a^2 \cdot a^3 = a^5$; $a^2 \cdot a^{-3} = a^{-1}$<br>$a^2 : a^5 = a^{-3}$; $a^4 \cdot a^{-2} = a^2$<br>$\left(a^3\right)^2 = a^6$<br>$a^5 \cdot b^5 = (ab)^5$<br>$a^5 : b^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^5$ |
| **Wissenschaftliche Schreibweise (Gleitkommadarstellung):**<br>Die ganze Zahl n in der Schreibweise $a \cdot 10^n$ gibt an, um wie viele Stellen das Komma bei a zu verschieben ist, um die gewöhnliche Schreibweise zu erhalten. | Bsp.:<br>$1,4 \cdot 10^4 = 14000$; $1,4 \cdot 10^{-4} = 0,00014$<br>$7200000 = 7,2 \cdot 10^6$; $0,000072 = 7,2 \cdot 10^{-5}$ |
| **Umfang und Flächeninhalt des Kreises** | |
| **Kreisumfang:**<br>$U_{Kreis} = 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi$<br>($r = Radius; d = Durchmesser; Kreiszahl\ \pi \approx 3{,}14$)<br>**Kreisfläche:**<br>$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$ | Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises mit 20 cm Umfang? |
| **Raumgeometrie** | |
| **Volumen und Oberfläche von Prismen und Zylindern:**<br>Für alle Prismen und Zylinder gilt:<br>$\text{Volumen}: V = G \cdot h$<br>$\text{Oberfläche}: O = 2 \cdot G + M$<br>$G: \text{Grundfläche};\ M: \text{Mantelfläche};\ h: \text{Höhe}$<br>Im Falle eines Zylinders gilt außerdem:<br>$G = \pi \cdot r^2$<br>$M = 2\pi \cdot r \cdot h$ | Berechne die Höhe eines Prismas mit quadratischer Grundfläche (a = 5 cm) und dem Volumen 225 cm².<br><br>Berechne die Oberfläche eines Zylinders mit Radius r = 3 cm und Höhe h = 4 cm. |

**Lösungen:**

Lineare Funktionen: Schnittpunkte mit den Achsen: (8/0) und (0/-6) bzw. (0,5/0) und (0/0,6)

Graphen zeichnen:



Geradengleichungen: a) $y = mx + t; \quad m = 0,25 \Rightarrow 1 = 0,25 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 0,75$

$\Rightarrow y = 0,25x + 0,75$

b) $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{2-(-1)}{-2-3} = \frac{3}{-5} = -0,6$

$\Rightarrow$ z.B. P einsetzen : $2 = -0,6 \cdot (-2) + t \Rightarrow y = -0,6x + 0,8$

Lineare Ungleichungen:

$$\begin{aligned} -3x + 3 &< 2x + 13 \\ -5x &< 10 \\ x &> -2 \\ x &\in \,]-2; \infty[ \end{aligned}$$

Gleichungssysteme: a) (2/-1) b) (0/1) c) (6/-1)

Wahrscheinlichkeit: a) $\Omega = \{KKK; KKZ; KZK; ZKK; KZZ; ZKZ; ZZK; ZZZ\}$

b) $\Omega = \{11;12;13;14;15;16;22;23;24;25;26;33;34;35;36;44;45;46;55;56;66\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$ mit $\Omega = \{KK; KZ; ZK; ZZ\}$

Bruchterme:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3+2x}{x^2-x} = \frac{2 \cdot x}{x^2-x} - \frac{3+2x}{x^2-x} = \frac{2x-(3+2x)}{x^2-x} = \frac{-3}{x^2-x} = -\frac{3}{x^2-x}$$

$$\frac{2}{x^2-x} \cdot \frac{x-1}{4x} = \frac{2 \cdot (x-1)}{(x^2-x) \cdot 4x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1) \cdot 4x} = \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{5y}{x^2} : \frac{y}{x^3} = \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y} = \frac{5y \cdot x^3}{x^2 \cdot y} = 5x$$

Bruchgleichungen:

$\frac{1-x}{x+1} = \frac{4-x}{x-1} \quad |\cdot(x+1)(x-1) = HN \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;1\}$

$(1-x)\cdot(x-1) = (4-x)\cdot(x+1)$ entspricht "Überkreuz – Multiplizieren"

$-x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 3x + 4$

$x = -5 \qquad L = \{-5\}$

$\frac{3}{x+2} = \frac{4}{2x+4} \quad |\cdot 2(x+2) = HN \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$6 \neq 4 \qquad L = \{\ \}$

Kreis: $20cm = 2r\pi \Rightarrow r \approx 3,18cm \quad \Rightarrow A = (3,18cm)^2 \pi \approx 31,83cm^2$

Raumgeometrie: $h = V : G = 225cm^2 : (5cm)^2 = 9cm$

$O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2 \cdot (3cm)^2 \cdot \pi + 2 \cdot 3cm \cdot \pi \cdot 4cm = 131,95cm^2$