Grundwissen Mathematik	8. Jahrgangsstufe

Wissen und Können	Aufgaben und Beispiele

Funktionen

Eine **Funktion** ist eine eindeutige Zuordnung: Jedem Wert aus der Definitionsmenge D_f wird **genau ein** Wert aus der Wertemenge W_f zugeordnet.

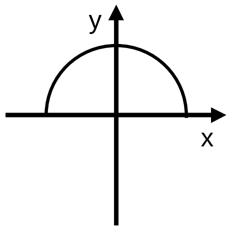
Schreibweisen:

Funktionsvorschrift: $f: x \mapsto y = \underbrace{0{,}5x+1}_{\text{Funktionsterm}}$

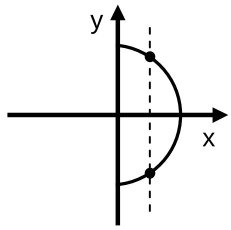
Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5x+1$ bzw. $y = 0{,}5x+1$

Graph:

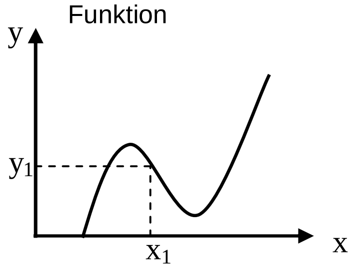
Ordnet man jedem Wertepaar (x;y) einen Punkt (x;y) im Koordinatensystem zu, so entsteht der Graph G_f der Funktion f.



Funktion



keine Funktion



Direkte Proportionalität: $y = c \cdot x$

x und y sind direkt proportional,

- wenn zum n-fachen Wert für x der n-fache Wert für y gehört
- die Wertepaare (x;y) **quotientengleich** sind:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = c \text{ (Konstante)}$$

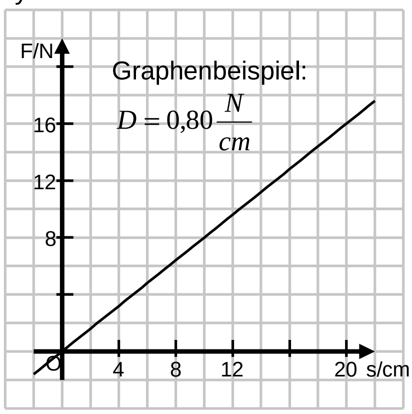
Der Graph einer direkten Proportionalität ist eine **Ursprungsgerade**.

Beispiel aus der Physik: **Gesetz von Hooke**

$$\frac{F}{s} = D = konst.$$

$$\frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2} = ... = D$$

F: Kraftbetrag
s: Auslenkung/ Dehnung
D: Federkonstante
(Federkonstante D entspricht Konstante c bzw. Steigung m)



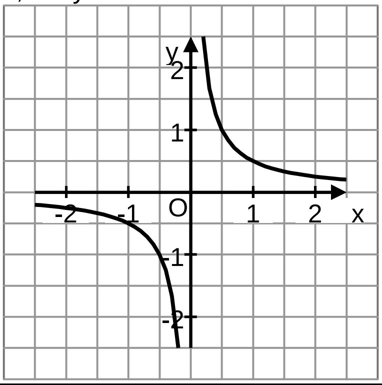
Indirekte Proportionalität: $y = \frac{c}{x}$; $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

x und y sind indirekt proportional,

- wenn zum n-fachen Wert für x der $\frac{1}{n}$-fache Wert für y gehört
- die Wertepaare (x;y) **produktgleich** sind:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = c \text{ (Konstante)}$$

Der Graph einer indirekten Proportionalität ist eine **Hyperbel**. Dabei ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote, die y-Achse eine senkrechte Asymptote.



Beispiel:

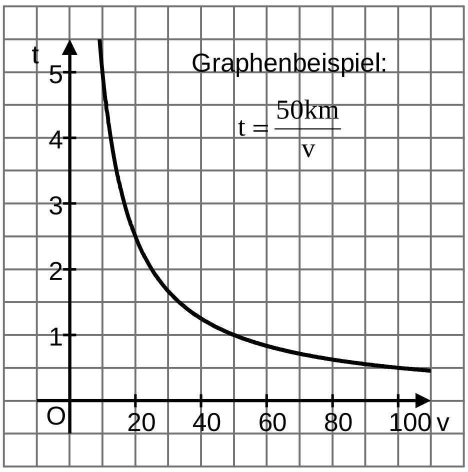
$$f: x \mapsto \frac{0{,}5}{x}$$

Beispiel aus der Physik: **Wegstrecke**

$$v \cdot t = s = \text{konst.}$$

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 = ... = s$$

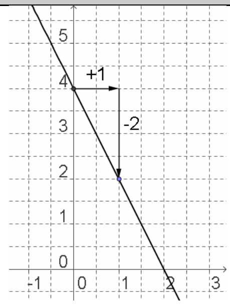
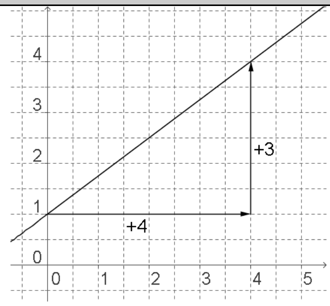
v: Geschwindigkeit
t: Zeit
s: Strecke



Hinweis:
Eigentlich besitzt eine Hyperbel zwei Graphenäste. (siehe linke Spalte)

Grundwissen Mathematik — 8. Jahrgangsstufe

Lineare Funktionen

Eine Funktion der Form $y = mx + t$ heißt lineare Funktion. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit Steigung **m**: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{Höhenzuwachs}}{\text{waagrechter Zuwachs}}$ Die Gerade schneidet die y-Achse beim y-Achsenabschnitt **t**.	 $y = -2x + 4$  $y = \frac{3}{4}x + 1$
Nullstellen: Die Stellen x, an denen der Graph einer Funktion die x-Achse schneidet, heißen Nullstellen. Zur Berechnung löst man die Gleichung $f(x) = 0$.	Berechne die Nullstelle der Funktionen $f(x) = \frac{3}{4}x - 6$; $g(x) = -1{,}2x + 0{,}6$
Standardaufgaben zu linearen Funktionen: *Graphen zeichnen:* y-Abschnitt markieren und Steigungsdreieck einzeichnen.	Zeichne den Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{3}{4}x - 6$; $g(x) = -0{,}4x + 2$
Aufstellen der Geradengleichung: Steigung bestimmen und y-Abschnitt bestimmen.	Bestimme die Gleichung der Geraden, für die gilt: a) Die Gerade verläuft durch P(1/1) und ist parallel zur Geraden $h: y = 0{,}25x + 1$. b) Die Gerade verläuft durch die Punkte P(-2/2) und Q(3/-1).

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

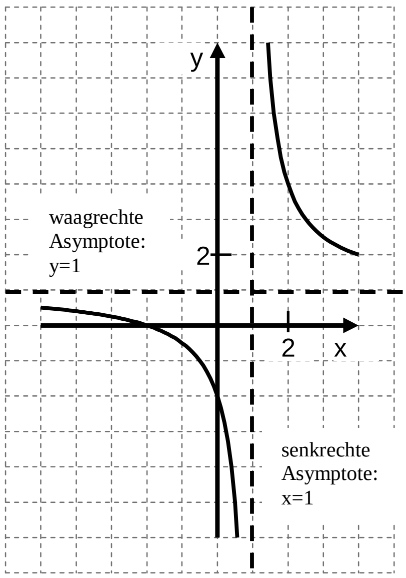
Lösungen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen (I und II) mit zwei Unbekannten sind Zahlenpaare, die beim Einsetzen beide Gleichungen I und II gleichzeitig erfüllen. Bei der **graphischen Lösung** werden die zu den beiden Gleichungen gehörigen Geraden gezeichnet. Der Schnittpunkt der Geraden ist die Lösung. Bei der **rechnerischen Lösung** stehen das Einsetzverfahren, das Gleichsetzverfahren sowie das Additionsverfahren zur Verfügung.	Löse die linearen Gleichungssysteme grafisch und rechnerisch: a) $\begin{array}{l} \text{I}: 3x - 2y = 8 \\ \text{II}: 2x + y = 3 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} \text{I}: 2x - y = -1 \\ \text{II}: y = 1 - x \end{array}$ c) $\begin{array}{l} \text{I}: -x + 4 = 2y \\ \text{II}: 0{,}5x - 1 = -2y \end{array}$

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Versuchsausgänge von Zufallsexperimenten heißen Ergebnisse ω. Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnismenge Ω. Teilmengen der Ergebnismenge heißen Ereignisse. Ein Elementarereignis besteht aus nur einem Element.	Gib die Ergebnismenge an: a) Dreimaliges Werfen einer Münze. b) Gleichzeitiges Werfen von zwei gleichartigen Würfeln.
Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace-Experimente	
Für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Laplace-Experiments gilt: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{\lvert E \rvert}{\lvert \Omega \rvert}$	Gib die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse an: A: Primzahl beim einmaligen Würfeln. B: Mindestens einmal „Zahl“ beim gleichzeitigen Werfen zweier unterschiedlicher Münzen.

Grundwissen Mathematik	8. Jahrgangsstufe

Gebrochen-rationale Funktionen

Im Funktionsterm einer gebrochen-rationalen Funktion steht die Variable im Nenner.	Bsp.: $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ $D_f=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ 
Die Nullstellen des Nennerterms heißen Definitionslücken.	

Bruchterme und Bruchgleichungen

Das **Rechnen mit Bruchtermen** erfolgt wie das gewöhnliche Bruchrechnen (gemeinsamer Nenner bei Addition und Subtraktion!).	Berechne: $\frac{2}{x-1}-\frac{3+2x}{x^2-x}$; $\frac{2}{x^2-x}\cdot\frac{x-1}{4x}$; $\frac{5y}{x^2}:\frac{y}{x^3}$
Bruchgleichungen: Definitionsmenge bestimmen; Gleichung mit einem gemeinsamen Nenner der Bruchterme multiplizieren; vereinfachte Gleichung lösen; prüfen, ob die Lösung in D_f enthalten ist.	Löse die Bruchgleichungen: $\frac{1-x}{x+1}=\frac{4-x}{x-1}$; $\frac{3}{x+2}=\frac{4}{2x+4}$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$ $a^0=1$; $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	Bsp.: $10^3=10\cdot10\cdot10=1000$; $10^{-3}=\frac{1}{10\cdot10\cdot10}=\frac{1}{1000}$ $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$; $3^{-4}=\frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=\frac{1}{81}$; $4^0=1$
Potenzgesetze: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $a^m:a^n=a^{m-n}$ $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$ $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$ $a^n:b^n=(a:b)^n$ mit $\left(a,b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\};\ m,n\in\mathbb{Z}\right)$	Bsp.: $a^2\cdot a^3=a^5$; $a^2\cdot a^{-3}=a^{-1}$ $a^2:a^5=a^{-3}$; $a^4\cdot a^{-2}=a^2$ $\left(a^3\right)^2=a^6$ $a^5\cdot b^5=(ab)^5$ $a^5:b^5=\left(\frac{a}{b}\right)^5$
Wissenschaftliche Schreibweise (Gleitkommadarstellung): Die ganze Zahl n in der Schreibweise $a\cdot10^n$ gibt an, um wie viele Stellen das Komma bei a zu verschieben ist, um die gewöhnliche Schreibweise zu erhalten.	Bsp.: $1,4\cdot10^4=14000$; $1,4\cdot10^{-4}=0,00014$ $7200000=7,2\cdot10^6$; $0,000072=7,2\cdot10^{-5}$

Umfang und Flächeninhalt des Kreises

Kreisumfang:

$U_{Kreis} = 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi$;

$(r = \text{Radius};\ d = \text{Durchmesser};\ \text{Kreiszahl}\ \pi \approx 3{,}14)$

Kreisfläche:

$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

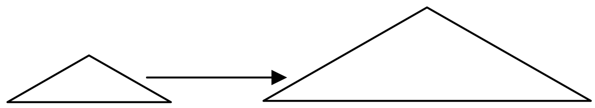
Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises mit 20cm Umfang?

Ähnlichkeit und Strahlensatz

Wird eine Originalfigur im Maßstab k $\left(k \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}\right)$ vergrößert bzw. verkleinert, so sind Originalfigur und Bildfigur zueinander **ähnlich** und es gilt:

- entsprechende Winkel sind gleich groß und
- entsprechende Seitenverhältnisse sind gleich groß.

Bsp. für $k = 2$

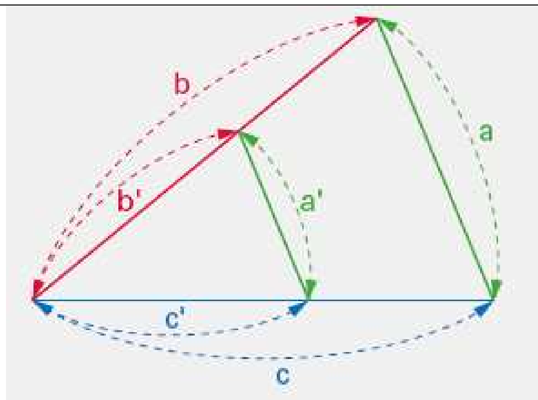


Strahlensätze an der V-Figur:

Wenn $a \parallel a'$ ist, gilt:

1. Strahlensatz: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ und

2. Strahlensatz: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$

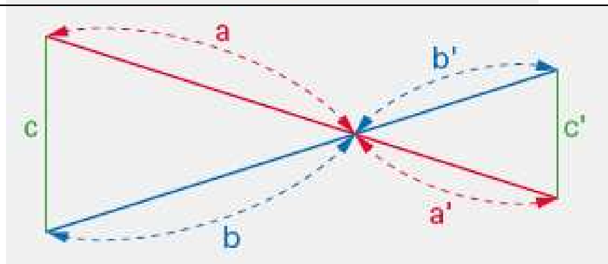


Strahlensätze an der X-Figur:

Wenn $c \parallel c'$ ist, gilt:

1. Strahlensatz: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ und

2. Strahlensatz: $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$; $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$



Die Strahlensätze in Worten:

1. Strahlensatz:
Je zwei Abschnitte auf der einen Geraden verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

2.Strahlensatz:
Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Endpunkte vom Zentrum auf der einen Geraden (oder auf der anderen Geraden).

Lösungen:

Lineare Funktionen:

Nullstellen: x=8 bzw. x=0,5

Geradengleichungen: a) $y = mx + t; \quad m = 0,25 \Rightarrow 1 = 0,25 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 0,75$

$\Rightarrow y = 0,25x + 0,75$

b) $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{2-(-1)}{-2-3} = \frac{3}{-5} = -0,6$

$\Rightarrow$ z.B. P einsetzen: $2 = -0,6 \cdot (-2) + t \Rightarrow y = -0,6x + 0,8$

Gleichungssysteme: a) (2;-1) b) (0/-1) c) (6;-1);

Wahrscheinlichkeit:

a) $\Omega = \{KKK; KKZ; KZK; ZKK; KZZ; ZKZ; ZZK; ZZZ\}$

b) $\Omega = \{11;12;13;14;15;16;22;23;24;25;26;33;34;35;36;44;45;46;55;56;66\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$ mit $\Omega = \{KK; KZ; ZK; ZZ\}$

Bruchterme:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3+2x}{x^2-x} = \frac{2 \cdot x}{x^2-x} - \frac{3+2x}{x^2-x} = \frac{2x-(3+2x)}{x^2-x} = \frac{-3}{x^2-x} = -\frac{3}{x^2-x}$$

$$\frac{2}{x^2-x} \cdot \frac{x-1}{4x} = \frac{2 \cdot (x-1)}{(x^2-x) \cdot 4x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1) \cdot 4x} = \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{5y}{x^2} : \frac{y}{x^3} = \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y} = \frac{5y \cdot x^3}{x^2 \cdot y} = 5x$$

Bruchgleichungen:

$$\frac{1-x}{x+1} = \frac{4-x}{x-1} \quad |\cdot (x+1)(x-1) = HN \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$$

$(1-x) \cdot (x-1) = (4-x) \cdot (x+1)$ entspricht "Überkreuz – Multiplizieren"

$$-x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 3x + 4$$

$$x = -5 \qquad L = \{5\}$$

$$\frac{3}{x+2} = \frac{4}{2x+4} \quad |\cdot 2(x+2) = HN \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$$

$$6 \neq 4 \qquad L = \{\ \}$$

Kreis: $20cm = 2r\pi \Rightarrow r \approx 3,18cm \quad \Rightarrow A = (3,18cm)^2 \pi \approx 31,83cm^2$